OPTIMIZAZIOA

1. **GILTZA II (38.ARIK-275.ORR)** Etxebizitza-agentzia batek 200 apartamentu dauzka alokaturik hiri batean eta bakoitzaren kasuan 160 euroko alokairua kobratzen du. Alokairua goratzen duen 5 euro bakoitzeko maizter bat galtzen du, merkeagoa den beste apartamentu batera pasatzen baita. Zein da agentziari irabazirik handiena dakarkion alokairua?

   Em: 580 €

2. **GILTZA II (40.ARIK-275.ORR)** Hesitu egin nahi dogun bide-bazterrean dagoen lursail errektangular bat. Bidearen ondoko hesiak 5€/m balio du eta beste hiru aldeetakoak 0,625 €/m. Kalkula ezazu 1800 eurorekin hesitu dezakegun azalera handieneko lurzailaren azalera.

   Em: 115.200 m^2

3. **GILTZA II (41.ARIK-275.ORR)** Petrolioa pilatzeko erabiltzen diren upelak zilindrikoak dira eta 160 litroko edukiera dute. Lortu zilindroaren dimentsioak, upelak erabilitako txaparen kantitatea minimoa izan dadin.
   Em.: r = 2,94 dm, h = 5,88 dm

4. **GILTZA II (45.ARIK-275.ORR)** Esmeralda baten pisua 16 g-koa da eta, dakigunez, esmeraldaren balioa beren pisuaren karratuaren proportzionala da. Esmeralda hori bi zatitan ebakitzen badugu , kalkulatu zati bakoitzak izan behar duen pisua , balio minimoa izan dadin.
   Em: 8g

5. Zati ezazu 40 zentimetroko segmentu bat bi partetan, horien gainean eraikitako triangelu aldekideen azaleren batura minimoa izango den eran

6. Orrialde batek 18 cm^2 testu eduki behar du. Goiko eta beheko marjinek bina zentimetro izan behar dituzte, eta alboetakoek bana. Aurki itzazu orriaren neurriak, pape raren kostua minimoa izan dadin.

7. Zer zenbaki positibok egiaztatzen du horri berorren aldrantzizkoa batuz gero ateratzen den batura minimoa izatea?

8. Deskonposa ezazu bi batugaitan 28 zenbakia, haien biderkadura maximoa izango den eran.

9. Kutxa ireki bat egiteko, hamar zentimetroko aldea duen kartoi karratu batetik kantoi bakoitzeko karratu bat moztuko dugu. Kalkula ezazu ebaki behar dugun karratuaren aldea, kutxaren bolumena maximoa izan dadin.

10. Bederatzi zentimetroko sortzailea duten kono guztien artean, aurkitu bolumen maximoa daukanaren erradioa.

11. Metalezko pote zilindriko estalkidun batzuk egin nahi ditugu. Estalkian erabili beharreko metalaren kostua, metro karratuko, ontziko gainerako metalaren kostuaren erdia da. Poteek 10 litroko edukiera izatea nahi badugu, nola egin behar ditugu kostua minimoa izan dadin?

12. Bi automobil bi errepide perpendikularretik doaz. Lehe nengoa A hiritik irten da bi errepideen arteko bidegurutzerantz 100 km/h-ko abiaduran, eta bigarrena B hiritik 80 km/h-ko abiaduran. A-tik bidegurutzerainoko distantzia 100 kilometrokoa da, eta B-tik bidegurutzera 120 km daude. Zer momentutan izango da minimoa bi automobilen arteko distantzia?

13. Aurkitu 6 metroko perimetroa duen leiho angeluzuzen baten neurriak, azalera maximoa izan dezan eta, horrela, argitasun maximoa sortu dezan.

14. Aurkitu bi zenbaki, zeinen batura 20 den, haien biderketa maximoa dela jakinda.

15. Aurkitu zenbaki bat non, bere karratua kentzean, emaitza maximoa lortzen dan.

16. 8 m^2 dituen leiho baten -marko angeluzuzen bat eraiki behar da. Sekzio horizontalen metro lineal batek 2,50 euro balio du, eta sekzio bertikalen metro lineal batek, berriz, 5 euro. Zehaztu leihoaren neurriak markoaren kostua minimizatzeko, eta aurkitu marko horren prezioa.

17. Aurkitu 3 zenbaki ez-negatibo, euren arteko batuketa 14 dana. Zenbaki bat bestearen bikoitza izan behar da eta haien karratuen batura :
a) Maximoa izanik
b) Minimoa izanik

18. Metro bateko luzera duen alanbre bat bi zatitan moztu dugu, batekin karratu bat eta bestearekin zirkulu bat eginez. Kalkulatu zati bakoitzaren neurriak, azaleraren batura hau maximoa izan dadin, azaleraren batura hau minimoa izan dadin.

19. Fruta-dendari batek kalkulatu du marrubi kilogramo bakoitzak sortutako irabazia salmenta-prezioaren araberakoa dela honako funtzio honen arabera: $B(x)=2x-x^2 - 0{,}84$, non $B(x)$ kilogramo bakoitzeko irabazia den, eurotan adierazita, eta x kilogramo bakoitzaren prezioa, hau ere eurotan.

a) Kilogramo bakoitzeko zein prezioren artean daude biltegi-jabearen irabaziak?
b) Kilogramo bakoitzeko zein preziok maximizatzen ditu irabaziak?
c) Biltegian 10.000 kilogramo marrubi badituzu, zein izango da lor dezakezun irabazi total maximoa?

20. x, y zenbaki erreal positibo guztien artean, non $x+y= 10$ den, aurkitu $p = x^2y$ biderkadura maximoa dutenak.

21. Telebista fabrika batek 300 €-tan saltzen ditu telebista bakoitza. x telebista fabrikatzeko kostuak $D(x) = 200x + x^2$ dira, non $0 \leq x \leq 80$ den.
a) Fabrikatu diren telebista guztiak saldu direla suposatuz, aurkitu x telebista fabrikatu eta saldu ondoren lortutako irabazi-funtzioa.
b) Zehaztu irabazi maximoa lortzeko fabrikatu behar diren gailu kopurua, baita aipatutako irabazi maximoa ere.

22. Kalkulatu 8ko perimetroa eta azalera maximoa dituen triangelu isoszelearen oinarria eta altuera.

23. Igerileku bat eraiki behar da paralelepipedo zuzen baten forman, oinarri karratu batekin. 192 m^2-ko baldosak ditugu igerilekuaren hormak eta hondoa estaltzeko. Zehaztu igerilekuaren neurriak, gehienezko edukiera izan dezan.

24. Aurkitu 60 cm-ko perimetroa duen kartulina laukizuzen baten x oinarria eta y altuera, kontuan izanik bira oso bat ematean alde bertikal baten inguruan, bolumen maximoko zilindro bat eragiten duela.

25. Diamante baten balioa bere pisuaren berbiduraren proportzionala da. Bitxigile batek diamante bat ebakitzeko esan dio bere laguntzaileari, eta zatiak ikusi dituenean ohartu da diamantearen balioaren galera maximoa izan dela. Nola ebaki du laguntzaileak diamantea?

OPTIMIZAZIOA

1. **GILTZA II (38.ARIK-275.ORR)** Etxebizitza-agentzia batek 200 apartamentu dauzka alokaturik hiri batean eta bakoitzaren kasuan 160 euroko alokairua kobratzen du. Alokairua goratzen duen 5 euro bakoitzeko maizter bat galtzen du, merkeagoa den beste apartamentu batera pasatzen baita. Zein da agentziari irabazirik handiena dakarkion alokairua?

Em: 580 €

	HASIERAN	BERRIA
APARTAM.	200.	$200-x$
PREZIOA	160 €	$160+5x$.
DIRU SARRERA	$200\cdot 160$	$(200-x)(160+5x)$

IRABAZIAK $\boxed{f(x) = (200-x)\cdot(160+5x)}$

Irabazirik handiena lortzeko, IRABAZIRIK MAXIMOA lortu behar da. Maximoa puntu singularra da beraz $f'(x)$ baliatuko da eta $f'(x)=0$. kalkulatu.

$$f(x) = 32.000 + 1000x - 160x - 5x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -5x^2 + 840x + 32000} \quad -5<0 \Rightarrow$$ PARABOLA GANBILA da. $\Downarrow$ ERPINA MAXIMOA

$$f'(x) = -10x + 840.$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -10x+840=0 \rightarrow \boxed{x=84}$$

Kasu honetan badakigu $x=84$ denean maximo bat dagoela parabola ganbila delako

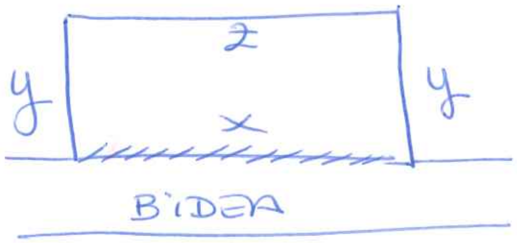
Maximoetan $f''(x_0)<0$ da eta egiaztatu daiteke

$$f''(x) = -10 \rightarrow f''(84) = -10 < 0 \rightarrow$$ ganbila $\Downarrow$ MAXIMOA.

ONDORIOZ Alokairua $= 160+5\cdot 84 = \boxed{580\ €}$

2. **GILTZA II (40.ARIK-275.ORR)** Hesitu egin nahi dogun bide-bazterrean dagoen lursail errektangular bat. Bidearen ondoko hesiak 5€/m balio du eta beste hiru aldeetakoak 0,625 €/m. Kalkula ezazu 1800 eurorekin hesitu dezakegun azalera handieneko lurzailaren azalera.

Em: 115.200 m²



	PREZIOA
x	5 €/m
y, z	0,625 €/m.

Hesiaren prezioa: $P = 5x + (2y+x)\cdot 0{,}625$

$1800 = 5{,}625x + 1{,}25y \rightarrow y = \dfrac{1800-5{,}625x}{1{,}25}$

Azalera $A = x\cdot y \leftarrow A(x,y) = x\cdot y$

$$y = \frac{1800-5{,}625x}{1{,}25} \Longrightarrow A(x) = x\cdot \underbrace{\frac{1800-5{,}625x}{1{,}25}}_{y}$$

AZALERA FUNTZIOA $\boxed{A(x) = \dfrac{1800x - 5{,}625x^2}{1{,}25}}$

Maximoa lortzeko $A'(x) = 0$.

$$A'(x) = \frac{1800-11{,}25x}{1{,}25} \qquad \frac{1800-11{,}25x}{1{,}25} = 0 \rightarrow \boxed{x = 160}$$

PTO SINF.

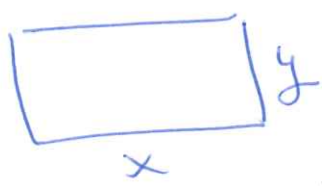
$A''(x) = -11{,}25 < 0 \rightarrow$ funtzio ganbila $\rightarrow$ MAXIMOA da

Beraz: AZALERA $A = x\cdot y$

$$A = 160\cdot\frac{1800-5{,}625\cdot 160}{1{,}25}$$

$$\boxed{A = 115{,}2\ m^2}$$

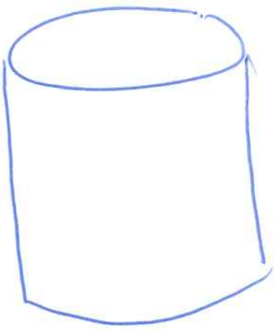
hau $x = 160$ m
$y = 720$ m.



3. **GILTZA II (41.ARIK-275.ORR)** Petrolioa pilatzeko erabiltzen diren upelak zilindrikoak dira eta 160 litroko edukiera dute. Lortu zilindroaren dimentsioak, upelak erabilitako txaparen kantitatea minimoa izan dadin.

Em.: r = 2,94 dm, h = 5,88 dm

$1\ell = 1\,dm^3$

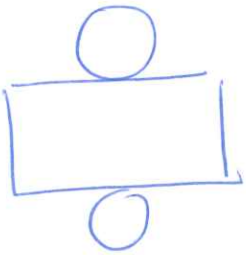


- BOLUMENA = 160 ℓ. (DANA)

$B = \pi r^2 \cdot h.$

$160 = \pi r^2 h. \longrightarrow \boxed{h = \frac{160}{\pi r^2}}$

- Erabilitako txapa, zilindroaren azalera da



$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h.$

$h = 160/\pi r^2 \rightarrow$

$A = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi} \cancel{r} \cdot \frac{160}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}$

$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{320}{r}$

$\boxed{A(x) = 2\pi x^2 + \frac{320}{x}}$ ← AZALERA FUNTZIOA.

Minimoa lortzeko $A'(x) = 0$

$-320x^2$

$A'(x) = 4\pi x + 320\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$A'(x) = 0 \longrightarrow 4\pi x - \frac{320}{x^2} = 0 \Longrightarrow 4\pi x^3 - 320 = 0$

Jakiteko $x = 2{,}94$ max edo min den: $x = \sqrt[3]{\frac{320}{4\pi}} \simeq \underline{2{,}94\,dm}$

$A''(x) \rightarrow A''(x) =$

$A''(x) = 4x + \frac{320 \cdot 2}{x^3}$ $A''(2{,}94) =$ $\Rightarrow$ MINIMO

Beraz: $A(2{,}94) = 2\pi \cdot 2{,}94^2 + \frac{320}{2{,}94} = \boxed{163{,}15}$

$r = 2{,}94\,dm \longrightarrow h = \frac{160}{\pi r^2} = \frac{160}{\pi \cdot 2{,}94^2} =$

$\boxed{\begin{array}{l} 2{,}94\,dm = r \\ 5{,}88\,dm = h \end{array}}$

4. **GILTZA II (45.ARIK-275.ORR)** Esmeralda baten pisua 16 g-koa da eta, dakigunez, esmeraldaren balioa beren pisuaren karratuaren proportzionala da. Esmeralda hori bi zatitan ebakitzen badugu , kalkulatu zati bakoitzak izan behar duen pisua , balio minimoa izan dadin.

Em: 8g

Esmeralda bi zatitan: x eta $16-x$

Balioa $\longrightarrow$ x^2 eta $(16-x)^2$

$$B(x) = x^2 + (16-x)^2$$

$$B'(x) = 2x + 2(16-x)(-1)$$

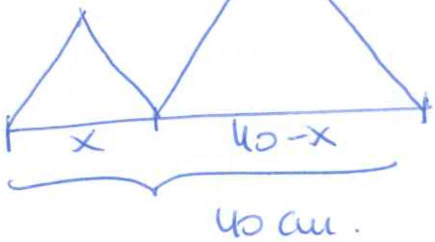
$$= 4x - 32$$

$$B'(x) = 0 \longrightarrow 4x - 32 = 0 \longrightarrow \boxed{x=8}$$

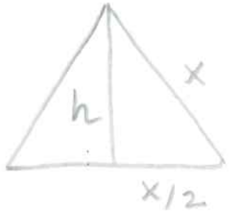
Beraz bi zatiak berdinak 8g koak.

5. Zati ezazu 40 zentimetroko segmentu bat bi partetan, horien gainean eraikitako triangelu aldekideen azaleren batura minimoa izango den eran

DANA



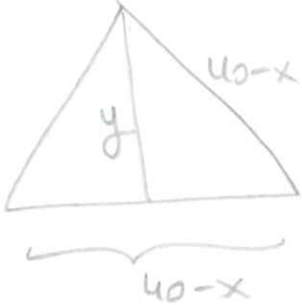
Segmentuaren bi zatiak x eta $40-x$.
eta dagokien azalerak:



$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+h^2=x^2 \longrightarrow h=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{4x^2-x^2}{4}}=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\,x}{2}.$$

$$A_{T_1}=\frac{x\cdot h}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\,x}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}$$



$$\left(\frac{40-x}{2}\right)^2+y^2=(40-x)^2$$

$$y=\sqrt{(40-x)^2-\frac{(40-x)^2}{2^2}}=\sqrt{\frac{3}{4}(40-x)^2}$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}(40-x).$$

$$A_{T_2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}(40-x)^2}$$

- **Azaleren batuketa**

$1600+x^2-80x$

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(40-x)^2$$

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(2x^2-80x+1600\right)$$

$$\boxed{A(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2-40x+800\right)}$$

AZALERA FN.

- Minimoa kalkulatzeko $A'(x)=0$

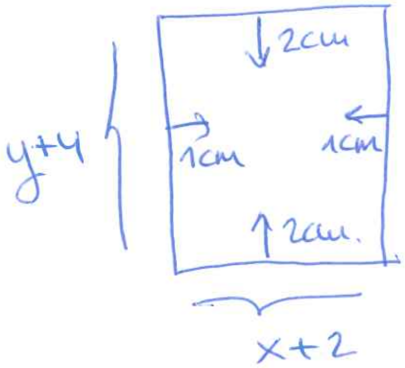
$$A'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-40).$$

$$A'(x)=0 \longrightarrow 2x-40=0 \quad \boxed{x=20}$$

$A''(x)=\sqrt{3}>0 \rightarrow$ minimoa da.

- Beraz segmentuaren bi zatiak berdinak dira

6. Orrialde batek 18 cm² testu eduki behar du. Goiko eta beheko marjinek bina zentimetro izan behar dituzte, eta alboetakoek bana. Aurki itzazu orriaren neurriak, pape raren kostua minimoa izan dadin. → AZALERA MINIMOA



AZALERA. KTSNA $= 18\,cm^2$ $\qquad 18 = x \cdot y$

$A(x) = (x+2)(y+4)$. $\qquad y = \frac{18}{x}$

$A(x) = (x+2)\left(\frac{18}{x}+4\right)$

$A(x) = 18 + 4x + \frac{36}{x} + 8$

$$\boxed{A(x) = 26 + 4x + \frac{36}{x}}$$

PAPERAREN KOSTUA. AZALERAREN MENPE DAGO

$A'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} \longrightarrow A'(x) = 0 \longrightarrow 4 = \frac{36}{x^2} \rightarrow x = \pm 3$

$A''(x) = -36(-2)x^{-3} = \frac{72}{x^3}$.

$A''(-3) = \frac{72}{-27} < 0 \longrightarrow f'' < 0$ MAXIMOA

$A''(3) = \frac{72}{+27} > 0. \longrightarrow f'' > 0$ MINIMOA $\rightarrow$ $x = 3$.

Berat kostua minimoa $x = 3 \longrightarrow y = \frac{18}{3} = 6$

Paperaren neurriak $x+2 \longrightarrow 5$

$y+4 \longrightarrow 10$.

$\boxed{5 \times 10}$ cm.

7. Zer zenbaki positibok egiaztatzen du horri berorren aldrantzizkoa batuz gero ateratzen den batura minimoa izatea?

$B(x) = x + \frac{1}{x}$.

$B'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$B'(x) = 0 \longrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \frac{1}{x^2} = 1 \longrightarrow x = \pm 1$

$B''(x) = \frac{-1(-2)}{x^3} = \frac{2}{x^3}$.

$B''(1) = 2 > 0 \quad x = 1$ minimo

$B''(-1) = -2 < 0 \quad x = -1$ maximo.

Batura minimoa: $B(1) = 1 + 1 = 2$.

$\boxed{\text{Zenbakia } x = 1.}$

8. Deskonposa ezazu bi batugaitan 28 zenbakia, haien biderkadura maximoa izango den eran.

$28 = x + (28 - x)$.

BIDERKADURA FUNTZIOA $B(x) = x \cdot (20 - x)$

$$\boxed{B(x) = 20x - x^2}$$

Maximoa izateko:

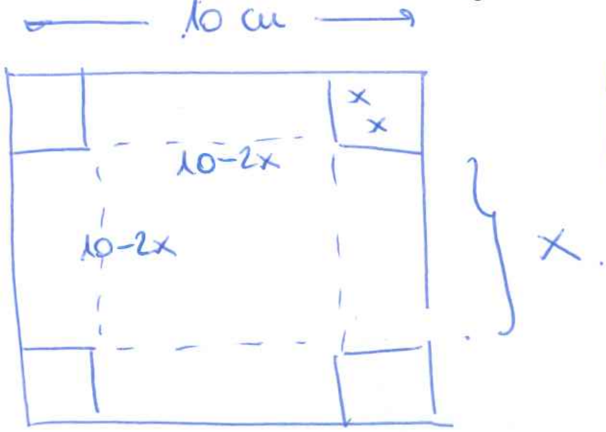
$B'(x) = 20 - 2x$.

$B'(x) = 0 \longrightarrow 20 - 2x = 0 \longrightarrow x = 10$.

$B'' = -2 < 0$. Berat $\underline{x = 10}$. MAXIMOA da.

Berat zenbakiak $\underline{10 \text{ eta } 18 \text{ dira}}$

9. Kutxa ireki bat egiteko, hamar zentimetroko aldea duen kartoi karratu batetik kantoi bakoitzeko karratu bat moztuko dugu. Kalkula ezazu ebaki behar dugun karratuaren aldea, kutxaren bolumena maximoa izan dadin.



$$\boxed{B(x) = (10-2x)^2 \cdot x}$$ BOLUMENAREN Fn.

$B(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$

$B'(x) = 12x^2 - 80x + 100$

$B'(x) = 0$

$12x^2 - 80x + 100 = 0$

$x = \frac{20 \pm 10}{6} < \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 5/3 \end{matrix}$ PTu sing

KARTOIAREN NEURRIAK

$(x+2) \times (x+2)$

$B(x) = (100 + 4x^2 - 40x) x$

Probatut x_1 eta x_2 maximoa ala minimoa dan:

$B''(x) = 24x - 80.$

$B''(5) = 24 \cdot 5 - 80 = 40 > 0$ minimo $x=5$

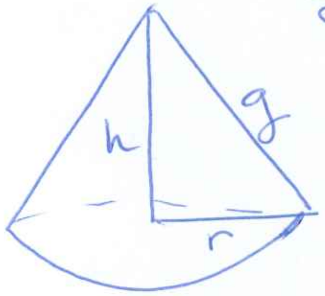
$B''(5/3) = 24 \cdot \frac{5}{3} - 80 < 0$ $\boxed{\text{maximo} \quad x = 5/3}$

· Beraz $x = 5/3$ denean bolumena maximoa da.

$B(5/3) = (10 - 2 \cdot 5/3)^2 \cdot 5/3 = \frac{2000}{27} = \boxed{24{,}69 \text{ cm}^3}$

10. Bederatzi zentimetroko sortzailea duten kono guztien artean, aurkitu bolumen maximoa daukanaren erradioa.

$g = 9\,cm$



$$B_{KONO} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \qquad h = \sqrt{g^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{9^2 - r^2}$$

$$B_{KONO} = \frac{\pi r^2 \sqrt{81 - r^2}}{3} \qquad h = \sqrt{81 - r^2}$$

- Bolumenaren Fn $\boxed{B(x) = \frac{\pi}{3}\sqrt{81x^4 - x^6}}$

- Bolumen maximoa $B'(x) = 0$

$$B'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{81 \cdot 4x^3 - 6 \cdot x^5}{2\sqrt{81x^4 - x^6}}$$

$$B'(x) = 0 \longrightarrow 81 \cdot 4 \cdot x^3 - 6x^5 = 0$$

$$x^3(324 - 6x^2) = 0$$

$$x^2 = \frac{324}{6} \qquad x = \pm\sqrt{54} = \pm 7{,}34$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 7{,}34} \quad (x = -7{,}34 \not\exists)$$

- Bolumen maximoa $r = 7{,}34$ cm-tan emoten da.

$$h = \sqrt{81 - 54} = 5{,}19$$

$$B(7{,}34) = \frac{\pi}{3}\sqrt{81 \cdot 7{,}34^4 - 7{,}34^6} = \boxed{293{,}83\ cm^3}$$

11. Metalezko pote zilindriko estalkidun batzuk egin nahi ditugu. Estalkian erabili beharreko metalaren kostua, metro karratuko, ontziko gainerako metalaren kostuaren erdia da. Poteek 10 litroko edukiera izatea nahi badugu, nola egin behar ditugu kostua minimoa izan dadin?

ESTALKIAREN KOSTUA $c/2$

GAINERAKO ONTZIAREN KOSTUA c

$B_{OL} = 10\,l$

KOSTUA MINIMOA IZATEKO ?

$A_{ESTALKIA} = \pi r^2$

$A_{GAINERAKOA} = \pi r^2 + 2\pi r h$

$B_{OL} = \pi r^2 \cdot h \longrightarrow 10 = \pi r^2 \cdot h \longrightarrow h = \frac{10}{\pi r^2}$

$$K = \frac{c}{2}\pi r^2 + c\left(\pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r}\cdot\frac{10}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}\right)$$

$$K(x) = \frac{c\pi}{2}x^2 + c\left(\pi x^2 + \frac{20}{x}\right)$$

$$\boxed{K(x) = \frac{3c\pi}{2}x^2 + \frac{20c}{x}}$$

- Kostu minimoa: $K'(x) = \frac{3c\pi}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x - \frac{20c}{x^2}$.

$K'(x) = 0 \longrightarrow 3c\pi x = \frac{20c}{x^2}$.

$x^3 = \frac{20\cancel{c}}{3\cancel{c}\pi} \longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{20}{3\pi}} = 1{,}285\ dm.$

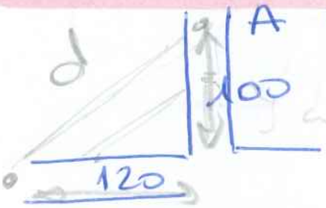
$\boxed{\text{Kostu minimoa izateko } r = 1{,}285\ dm.}$

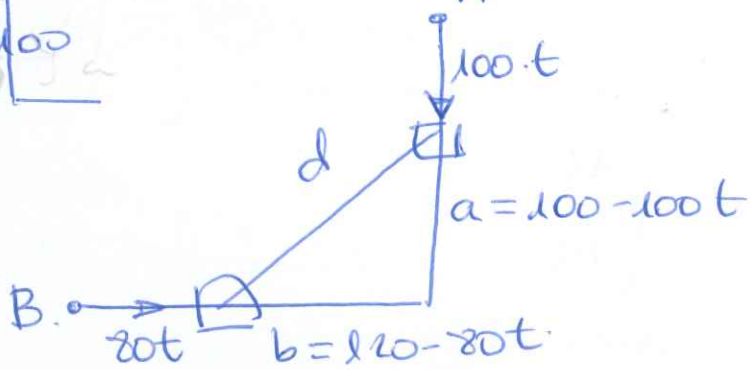
12. Bi automobil bi errepide perpendikularretik doaz. Lehe nengoa A hiritik irten da bi errepideen arteko bidegurutzerantz 100 km/h-ko abiaduran, eta bigarrena B hiritik 80 km/h-ko abiaduran. A-tik bidegurutzerainoko distantzia 100 kilometrokoa da, eta B-tik bidegurutzera 120 km daude. Zer momentutan izango da minimoa bi automobilen arteko distantzia?

$e = v \cdot t$

A $v_A = 100$ km/h.

B $v_B = 80$ km/h





$$d = \sqrt{(100-100t)^2 + (120-80t)^2}$$

$$= \sqrt{24400 - 39200t + 16400t^2}$$

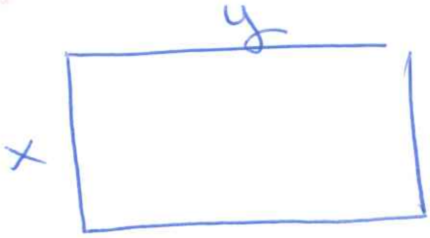
$$= 20\sqrt{61 - 98t + 41t^2}$$

$$d'(t) = \frac{20}{2}\,\frac{41 \cdot 2 \cdot t - 98t}{\sqrt{61-98t+41t^2}}$$

$$d'(t) = 0 \longrightarrow 82t - 98t = 0 \longrightarrow \underline{t = \frac{49}{41}}$$

$$t = 1{,}19512 \text{ h} = \underline{\underline{1\text{h } 11 \text{ min } 42 \text{ sg}}}$$

13. Aurkitu 6 metroko perimetroa duen leiho angeluzuzen baten neurriak, azalera maximoa izan dezan eta, horrela, argitasun maximoa sortu dezan.



DATUAK

$P = 6m$

$6 = 2x + 2y \longrightarrow \boxed{y = 3 - x}$

AZALERA FUNTZIOA

$A(x,y) = x \cdot y$.

$\boxed{A(x) = x(3-x)}$

Azalera fu: $A(x) = 3x - x^2$

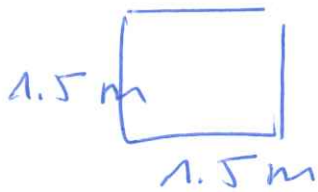
$A'(x) = 3 - 2x$.

$A'(x) = 0 \longrightarrow 3 = 2x \longrightarrow x = 3/2$

$A''(x) = -2 < 0 \longrightarrow x = 3/2$ MAXIMOA DA

NEURRIAK: $x = 3/2$

$y = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.



14. Aurkitu bi zenbaki, zeinen batura 20 den, haien biderketa maximoa dela jakinda.

$B(x,y) = x \cdot y$

DATUA: $x + y = 20 \longrightarrow y = 20 - x$

$\Longrightarrow B(x) = x \cdot (20 - x)$

$\boxed{B(x) = 20x - x^2}$

$B'(x) = 20 - 2x$

$B'(x) = 0 \longrightarrow 20 - 2x = 0 \longrightarrow \boxed{x = 10}$

Konprobatu maximoa dela:

$B''(x) = -2 < 0 \longrightarrow$ $x = 10$ MAXIMOA da

$\boxed{\text{Zenbakiak } x=10 \text{ eta } y=10 \text{ dira}}$

15. Aurkitu zenbaki bat non, bere karratua kentzean, emaitza maximoa lortzen dan.

X ZENBAKIA

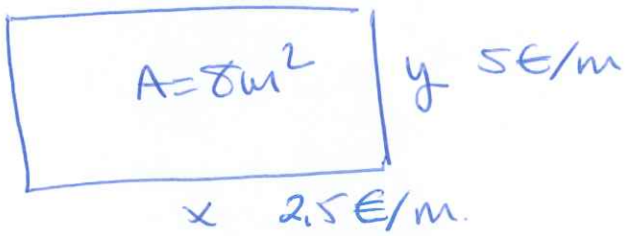
$f(x) = x - x^2$

$f'(x) = 1 - 2x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow \boxed{x = 1/2}$

$f''(x) = -2 < 0$ Berat maximoa da.

16. 8 m² dituen leiho baten -marko angeluzuzen bat eraiki behar da. Sekzio horizontalen metro lineal batek 2,50 euro balio du, eta sekzio bertikalen metro lineal batek, berriz, 5 euro. Zehaztu leihoaren neurriak markoaren kostua minimizatzeko, eta aurkitu marko horren prezioa.



KOSTUA $= 2x \cdot 2{,}5 + 2y \cdot 5$

$$\begin{cases} K = 5x + 10y \\ A = x \cdot y \rightarrow y = \dfrac{8}{x} \end{cases}$$

- KOSTU Fn $\rightarrow K(x) = 5x + 10 \cdot \dfrac{8}{x}$

$$\boxed{K(x) = 5x + \frac{80}{x}} \qquad 80 \cdot x^{-1}$$

- $K'(x) = 5 + 80(-1) \cdot x^{-2} \rightarrow K'(x) = 5 - \dfrac{80}{x^2}$ $\qquad -80x^{-2}$

$K'(x) = 0 \rightarrow 5 - \dfrac{80}{x^2} = 0 \rightarrow \dfrac{80}{x^2} = 5 \rightarrow \boxed{x = \pm 4}$

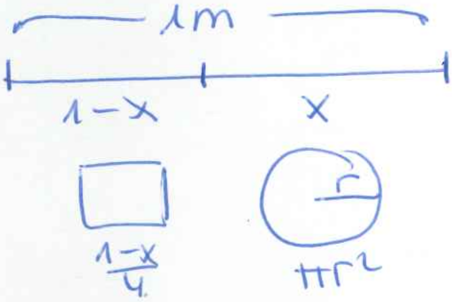
$K''(x) = \dfrac{160}{x^3} \begin{cases} K''(4) = \dfrac{160}{4^3} > 0 \rightarrow x = 4 \text{ MIN.} \\ K''(-4) = \dfrac{160}{(-4)^3} < 0 \rightarrow x = -4 \text{ MAX.} \end{cases}$

- KOSTU MINIMOA

$\boxed{x = 4} \rightarrow \boxed{y = 2}$ denean

$K(4) = 5 \cdot 4 + \dfrac{80}{4} \rightarrow$ KOSTUA $= 40$ €

18. Metro bateko luzera duen alanbre bat bi zatitan moztu dugu, batekin karratu bat eta bestearekin zirkulu bat eginez. Kalkulatu zati bakoitzaren neurriak, azaleraren batura hau maximoa izan dadin, azaleraren batura hau minimoa izan dadin.



FUNTZIOA : AZALEREN BATUKETA

$$A(x,r) = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 + \pi r^2$$

$$P = 2\pi r \longrightarrow 2\pi r = x.$$

$$r = \frac{x}{2\pi}$$

$$A(x) = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$A(x) = \frac{1}{16}(1-x)^2 + \frac{x^2}{4\pi} = \frac{1}{16}(x^2-2x+1) + \frac{x^2}{4\pi} =$$

$$= \frac{\pi(x^2-2x+1)+4x^2}{16\pi} = \frac{x^2(\pi+4)-2x\pi+\pi}{16\pi}.$$

Azaleren batuketa funtzioa $\longrightarrow$ $\boxed{A(x) = \frac{1}{16\pi}\left[(\pi+4)\cdot x^2 - 2\pi x + \pi\right] \quad 0 \leq x \leq 1}$

Puntu singularrak ateratzeko:

$$A'(x) = 0$$

$$A'(x) = \frac{2(\pi+4)}{16\pi}x - \frac{2\cancel{\pi}}{16\cancel{\pi}} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{8}} = \frac{\pi+4}{\cancel{8}\pi}x$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{\pi+4}}$$

$$A''(x) = \frac{2(\pi+4)}{16\pi} > 0 \Longrightarrow \text{MINIMOA}$$

Beraz azaleraren batura minimoa $x = \frac{\pi}{\pi+4}$ denean ematen du alanbrea $\frac{\pi}{\pi+4}$ eta $\frac{4}{4+\pi}$ m ko zatiak egiten

19. Fruta-dendari batek kalkulatu du marrubi kilogramo bakoitzak sortutako irabazia salmenta-prezioaren araberakoa dela honako funtzio honen arabera: $B(x)=2x-x^2 - 0{,}84$, non $B(x)$ kilogramo bakoitzeko irabazia den, eurotan adierazita, eta x kilogramo bakoitzaren prezioa, hau ere eurotan.

a) Kilogramo bakoitzeko zein prezioren artean daude biltegi-jabearen irabaziak?
b) Kilogramo bakoitzeko zein preziok maximizatzen ditu irabaziak?
c) Biltegian 10.000 kilogramo marrubi badituzu, zein izango da lor dezakezun irabazi total maximoa?

$\boxed{B(x) = -x^2+2x-0{,}84}$ IRABAZIEN FN

a) Irabaziak positiboak izateko.

$-x^2+2x-0{,}84 > 0$. ∩.

$x^2-2x+0{,}84 < 0$

$x = \dfrac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot0{,}84}}{2} = \begin{cases} 0{,}6 \\ 1{,}4 \end{cases}$

$B(x) > 0 \rightarrow x \in (0{,}6\ ;\ 1{,}4)$

b) IRABAZIAK MAXIMIZAN?

Prezio maximizatzen da parabolaren erpinean.

$-x^2+2x-0{,}84$

$-2x+2=0 \rightarrow \boxed{x=1}$.

$B(1) = -1^2+2\cdot1-0{,}84 = 0{,}16$ €/kg.

c) 10.000 kg MARRUBI, IRABAZI MAXIMOAK.

$10.000 \cdot 0{,}16 = 1600$ €

20. x, y zenbaki erreal positibo guztien artean, non x+y= 10 den, aurkitu p = x²y biderkadura maximoa dutenak.

$x+y=10 \longrightarrow y=10-x$

$p=x^2y$

$P(x)=x^2\cdot(10-x)$

$\boxed{P(x)=10x^2-x^3.}$

- $P'(x)=20x-3x^2$

$P'(x)=0 \longrightarrow 20x-3x^2=0$

$x(20-3x)=0 < \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=20/3. \end{matrix}$

$P''(x)=20-6x.$

$P''(0)=20>0 \longrightarrow$ minimoa $x=0$

$P''\left(\frac{20}{3}\right)=20-6\,\frac{20}{3}=-20<0 \rightarrow$ maximoa $x=20/3$

- Biderketa maximoa izateko

$\boxed{x=20/3.}$

$\longrightarrow P\left(\frac{20}{3}\right)=10\left(\frac{20}{3}\right)^2-\left(\frac{20}{3}\right)^3=\underline{148,15}$

Biderk maximoa

21. Telebista fabrika batek 300 €-tan saltzen ditu telebista bakoitza. x telebista fabrikatzeko kostuak $D(x) = 200x + x^2$ dira, non $0 \le x \le 80$ den.

a) Fabrikatu diren telebista guztiak saldu direla suposatuz, aurkitu x telebista fabrikatu eta saldu ondoren lortutako irabazi-funtzioa.

b) Zehaztu irabazi maximoa lortzeko fabrikatu behar diren gailu kopurua, baita aipatutako irabazi maximoa ere.

$D(x) = 200x + x^2 \quad 0 \le x \le 80$ Fabrikatzeko kostua.

a) IRABAZI FUNTZIOA

$I(x) = 300x - D(x)$

$I(x) = 300x - 200x - x^2$

$\boxed{I(x) = 100x - x^2}$

b) IRABAZI MAXIMOAK.

$I'(x) = 100 - 2x.$

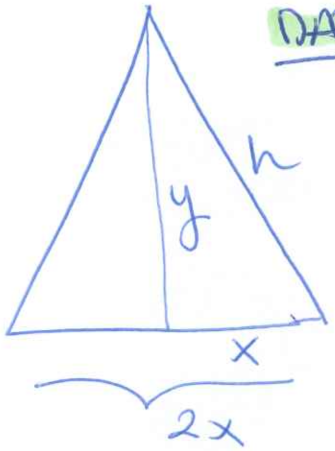
$I'(x) = 0 \longrightarrow 100 = 2x \longrightarrow x = 50.$

$I''(x) = -2 < 0 \longrightarrow x=5$ maximoa da.

Irabazi maximoak $x=50$ denean:

$I(50) = 100 \cdot 50 - 50^2 = \boxed{2500\ €}$

22. Kalkulatu 8ko perimetroa eta azalera maximoa dituen triangelu isoszelearen oinarria eta altuera.



DATUA

$P = 8$

$h = \sqrt{x^2+y^2}$

$8 = 2\sqrt{x^2+y^2} + 2x.$

$8 - 2x = 2\sqrt{x^2+y^2}$

$4 - x = \sqrt{x^2+y^2}$

$16 + \cancel{x^2} - 8x = \cancel{x^2} + y^2$

$\boxed{y = \sqrt{16-8x}}$

AZALERA FUNTZIOA

$A(x,y) = \dfrac{2x \cdot y}{2} = x \cdot y = x \cdot \sqrt{16-8x}$

$\boxed{A(x) = x \cdot \sqrt{16-8x}} \Rightarrow \boxed{A(x) = \sqrt{16x^2-8x^3}}$

$\sqrt{4(4x^2-2x^3)}$

$A'(x) = \dfrac{32x-24x^2}{2\sqrt{16x^2-8x^3}} \Rightarrow A'(x) = \dfrac{16x-12x^2}{\sqrt{16x^2-8x^3}}$

$4x^2(4-2x)$

$A'(x) = \dfrac{16x-12x^2}{2x\sqrt{4-2x}} = \dfrac{8-6x}{\sqrt{4-2x}}$

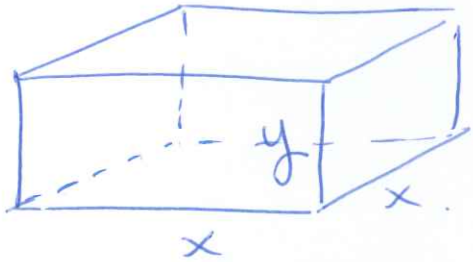
$A'(x) = 0 \rightarrow 8 - 6x = 0 \rightarrow x = 8/6 = 4/3$

$2x = 8/6$

Berat: Azalera maximoa dituen triangelu isoszelearen oinarria 8/3 eta altuera

$y = \sqrt{16-8x} = \sqrt{16 - 8 \cdot \frac{4}{3}} = \underline{1{,}30 \text{ altuera}}$

23. Igerileku bat eraiki behar da paralelepipedo zuzen baten forman, oinarri karratu batekin. 192 m²-ko baldosak ditugu igerilekuaren hormak eta hondoa estaltzeko. Zehaztu igerilekuaren neurriak, gehienezko edukiera izan dezan.



DATUA

Baldosekin estaltzeko azalera $= 192\ m^2$

$A = x^2 + 4xy$

$192 = x^2 + 4xy$

$y = \frac{192 - x^2}{4x}$

BOLUMENA $B(x) = x^2 \cdot y$

$B(x) = x^{\cancel{2}} \cdot \frac{192 - x^2}{4\cancel{x}} = \frac{(192 - x^2)x}{4}$

$$\boxed{B(x) = \frac{1}{4}(192x - x^3)}$$

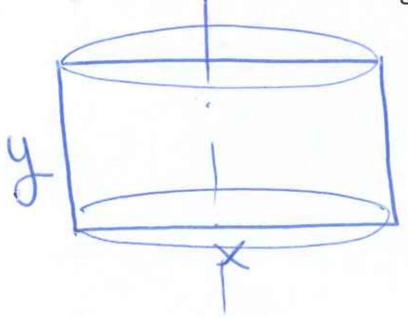
Bolumen maximoa:

$B'(x) = \frac{1}{4} \cdot (192 - 3x^2)$

$B'(x) = 0 \longrightarrow 192 - 3x^2 = 0$ $\boxed{x = 8}$

$B''(x) = \frac{1}{4} \cdot (-6x)$

24. Aurkitu 60 cm-ko perimetroa duen kartulina laukizuzen baten x oinarria eta y altuera, kontuan izanik bira oso bat ematean alde bertikal baten inguruan, bolumen maximoko zilindro bat eragiten duela.



$$B(x,y) = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot y$$

DATUAK: $P = 60$ cm

$$60 = 2x + 2y$$

$$\rightarrow y = 30 - x$$

$$B = \pi r^2 h$$

$$r = x/2$$

$$h = y$$

• Beraz BOLUMENAREN FUNTZIOA aldagai bakar baten menpe:

$$B(x) = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 (30-x)$$

$$B(x) = \frac{\pi}{4} x^2 (30-x)$$

$$\boxed{B(x) = \frac{\pi}{4}(30x^2 - x^3)}$$

• Bolumen maximoa aurkitzeko $B'(x) = 0$

$$B'(x) = \frac{\pi}{4}(60x - 3x^2)$$

$$B'(x) = 0 \longrightarrow 60x - 3x^2 = 0$$

$$x(60 - 3x) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 20}$$

• Ziurtatzeko maximoa dela.

$B'(x)$	$\oplus$		$\ominus$
$B(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$

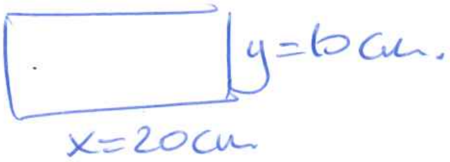
$$B''(x) = \frac{\pi}{4}(60 - 6x)$$

$$B''(20) = \frac{\pi}{4}(60 - 6 \cdot 20) < 0 \quad B''(20) < 0 \rightarrow \text{maximoa}$$

• Beraz.

$$x = 20$$

$$y = 10$$



25. Diamante baten balioa bere pisuaren berbiduraren proportzionala da. Bitxigile batek diamante bat ebakitzeko esan dio bere laguntzaileari, eta zatiak ikusi dituenean ohartu da diamantearen balioaren galera maximoa izan dela. Nola ebaki du laguntzaileak diamantea?

BALIO MINIMOA

Diamantearen balioa $B = k \cdot P^2$

Bi zati egiten badira $\underbrace{x}_{1.\text{ zatia}} \quad \underbrace{(P-x)}_{2.\text{ zatia}} = y$

$$B(x,y) = k \cdot x^2 + k y^2$$

$$y = P - x.$$

$$B(x) = k \cdot x^2 + k(P-x)^2$$

$$= kx^2 + kP^2 - 2kPx + kx^2$$

$$\boxed{B(x) = 2k\,x^2 - 2kP\,x + kP^2}$$

Galera maximoa bada $\begin{cases} B'(x) = 0 \\ B''(x) < 0 \end{cases}$

$$B'(x) = 4kx - 2kP.$$

$$4kx - 2kP = 0 \longrightarrow x = \frac{2kP}{4k} \longrightarrow \boxed{x = \frac{P}{2}}$$

$$B''(x) = 4k.$$

$$B''\left(\frac{P}{2}\right) = 4k > 0 \longrightarrow$$

Balio minimoa beraz galera maximoa da $x = P/2$ denean

KONTUAN IZAN DIAMANTEAREN BALIO MINIMOA DENEAN, GALERA MAXIMOA IZANGO DALA